2016 Taiwan TST 2nd round

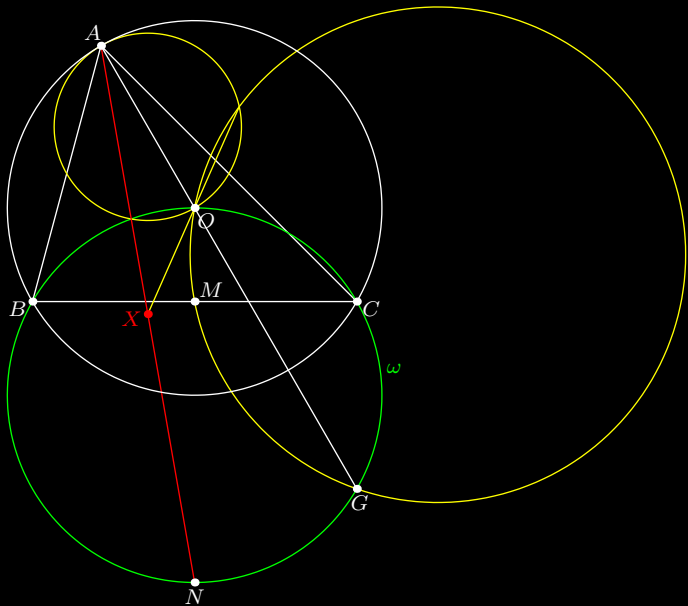
Doubt Yourself

André Pinheiro

Novembro de 2023

2016 Taiwan TST 2nd round

Seja O o circuncentro do triângulo ABC e ω o circuncentro do triângulo BOC. A reta AO intersecta o círculo ω novamente no ponto G. Seja M o ponto médio do lado BC, e a mediatriz de BC intersecta a circunferência ω nos pontos O e N.

Prove que o ponto médio do segmento AN está no eixo radical da circunferência circunscrita ao triângulo OMG, e à circunferência cujo diâmetro é AO.

A
O
M
B
X
C
ω
G
N

Solução

Para resolvermos este problema, iremos usar um teorema muito útil que nos permite ter acesso a potências de ponto "inacessíveis": linearidade de potência de ponto.

Solução

Para resolvermos este problema, iremos usar um teorema muito útil que nos permite ter acesso a potências de ponto "inacessíveis": linearidade de potência de ponto.

Definição (função linear): Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é linear se, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathbb{R}^2$, temos

$$f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) = \lambda f(X) + (1 - \lambda) f(Y).$$

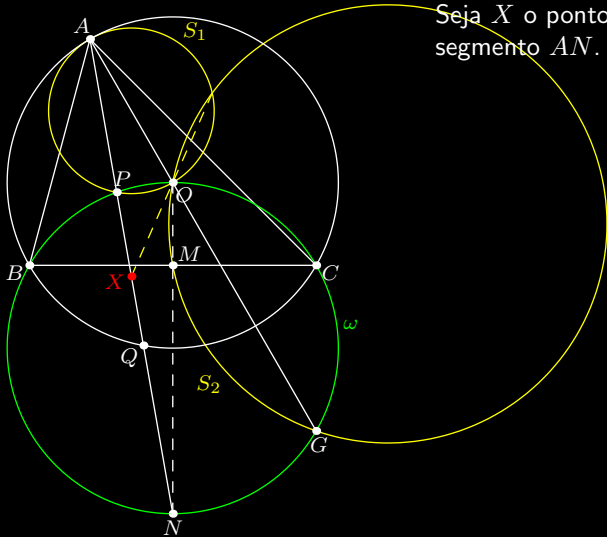
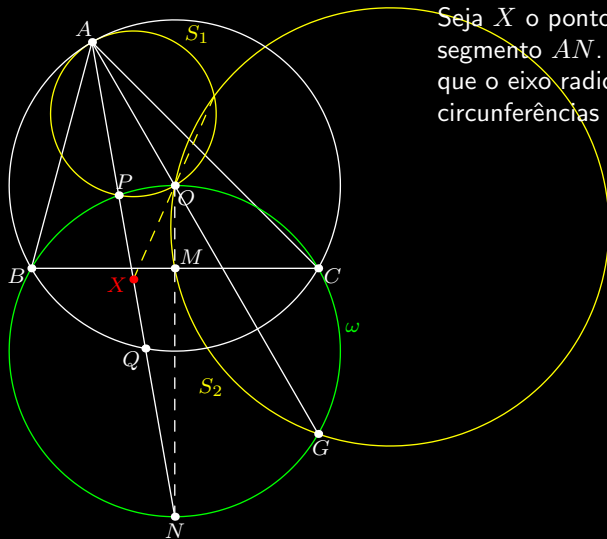
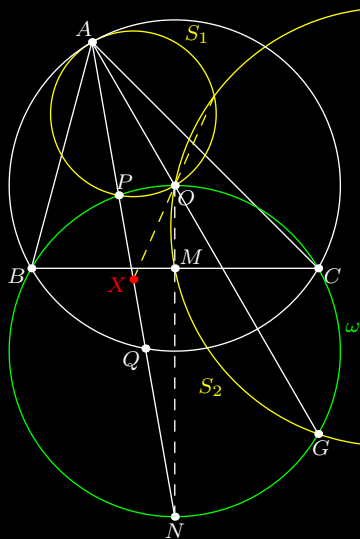
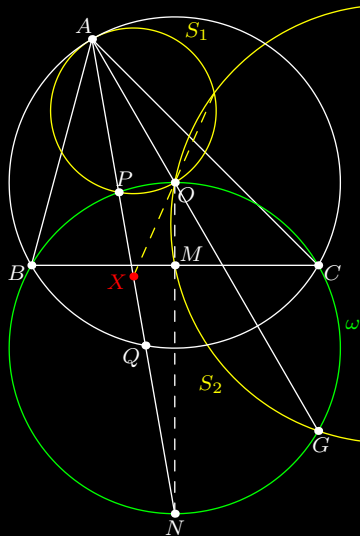
Solução

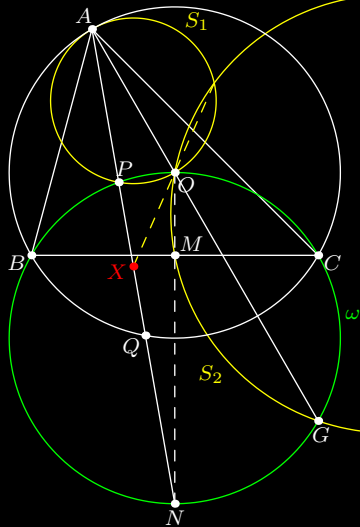
Para resolvermos este problema, iremos usar um teorema muito útil que nos permite ter acesso a potências de ponto "inacessíveis": linearidade de potência de ponto.

Definição (função linear): Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é linear se, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathbb{R}^2$, temos

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y).$$

Teorema (linearidade): Seja $f(X) = \text{Pot}(X, \omega_1) - \text{Pot}(X, \omega_2)$, em que $X \in \mathbb{R}^2$ e ω_1, ω_2 são duas circunferências. Então f é função linear.

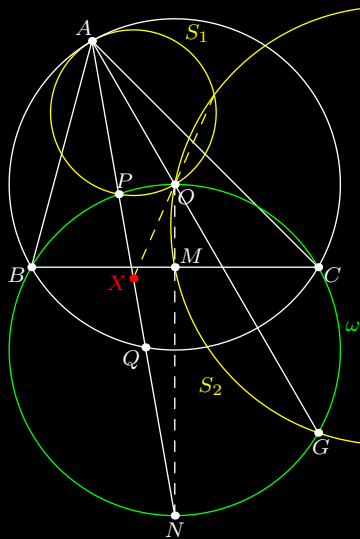
Seja X o ponto médio do segmento AN.

Seja X o ponto médio do segmento AN. Queremos provar que o eixo radical das duas circunferências amarelas.
A
S_1
P
O
M
B
C
X
ω
Q
S_2
G
N

A
S_1
P
O
M
B
C
X
ω
Q
S_2
G
N
Seja X o ponto médio do segmento AN. Queremos provar que o eixo radical das duas circunferências amarelas. Seja S_1 a circunferência de diâmetro AO e S_2 a circunferência que passa por O, M, G. Seja também
$P = S_1 \cap AN$ e
$Q = (ABC) \cap AN$.

Seja X o ponto médio do segmento AN. Queremos provar que o eixo radical das duas circunferências amarelas. Seja S_1 a circunferência de diâmetro AO e S_2 a circunferência que passa por O, M, G. Seja também $P = S_1 \cap AN$ e $Q = (ABC) \cap AN$.

Vamos definir $f(X) = \text{Pot}(X, S_1) - \text{Pot}(X, S_2)$.

Seja X o ponto médio do segmento AN. Queremos provar que o eixo radical das duas circunferências amarelas. Seja S_1 a circunferência de diâmetro AO e S_2 a circunferência que passa por O, M, G. Seja também $P = S_1 \cap AN$ e $Q = (ABC) \cap AN$.

Vamos definir $f(X) = \text{Pot}(X, S_1) - \text{Pot}(X, S_2)$.

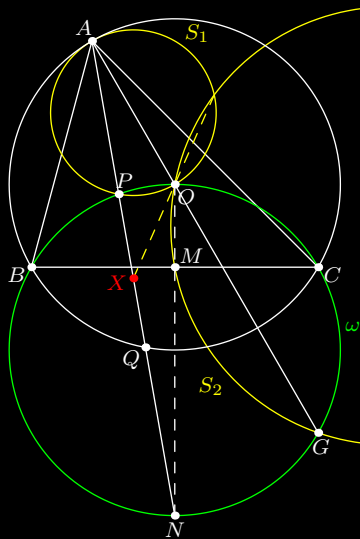
Gostaríamos de provar que $\text{Pot}(X, S_1) = \text{Pot}(X, S_2)$, isto é, $f(X) = 0$.

Ora, como $X = \frac{A+N}{2}$, então $f(X) = \frac{1}{2}(f(A) + f(N))$.

Ora, como $X = \frac{A+N}{2}$, então $f(X) = \frac{1}{2}(f(A) + f(N))$. Temos que
$f(A) = \text{Pot}(A, S_1) - \text{Pot}(A, S_2) = -AO.AG$
e
$f(N) = \text{Pot}(N, S_1) - \text{Pot}(N, S_2) = NP.NA - NM.NO$.
A
S_1
P
O
M
B
C
X
Q
ω
S_2
G
N

Ora, como $X = \frac{A+N}{2}$, então
$f(X) = \frac{1}{2}(f(A) + f(N))$.Temos
que
$f(A) =$ Pot$(A, S_1) -$ Pot$(A, S_2) =$
$-AO.AG$
e
$f(N) =$
Pot$(N, S_1) -$ Pot$(N, S_2) =$
$NP.NA - NM.NO$.
Logo, $2f(X) =$
$-AO.AG + NP.NA - NM.NO$.
A
S_1
P
O
B
M
C
X
ω
Q
S_2
G
N

Ora, como $X = \frac{A+N}{2}$, então $f(X) = \frac{1}{2}(f(A) + f(N))$. Temos que

$f(A) = \text{Pot}(A, S_1) - \text{Pot}(A, S_2) = -AO.AG$

e

$f(N) = \text{Pot}(N, S_1) - \text{Pot}(N, S_2) = NP.NA - NM.NO$.

Logo, $2f(X) = -AO.AG + NP.NA - NM.NO$.

Como $AO.AG = \text{Pot}(A, \omega) = AP.AN$, segue que

$2f(X) = -AP.AN + NP.NA - NM.NO$.

$= NA(NP - AP) - NM.NO$
A
S_1
P
O
M
B
X
C
ω
Q
S_2
G
N

$= NA(NP - AP) - NM.NO =$
$NA(NP - PQ) - NM.NO$
A
S_1
P
O
M
B
X
C
ω
Q
S_2
G
N

= NA(NP − AP) − NM.NO =
NA(NP − PQ) − NM.NO =
NA.NQ − NM.NO.
A
S1
P
O
M
B
C
X
ω
Q
S2
G
N

$= NA(NP - AP) - NM.NO =$
$NA(NP - PQ) - NM.NO =$
$NA.NQ - NM.NO$.
Seria bom provar que A, O, M, Q são cocíclicos, pois assim $NA.NQ = NM.NO$.
A
S_1
P
O
M
B
C
X
ω
Q
S_2
G
N

A
S_1
P
O
M
B
X
C
ω
Q
S_2
G
N
$= NA(NP - AP) - NM.NO =$
$NA(NP - PQ) - NM.NO =$
$NA.NQ - NM.NO$.
Seria bom provar que A, O, M, Q são cocíclicos, pois assim $NA.NQ = NM.NO$. Fica como exercício ao leitor provar essa proposição.

$= NA(NP - AP) - NM.NO =$
$NA(NP - PQ) - NM.NO =$
$NA.NQ - NM.NO$.

Seria bom provar que A, O, M, Q são cocíclicos, pois assim $NA.NQ = NM.NO$. Fica como exercício ao leitor provar essa proposição.

Como A, O, M, Q são concíclicos, então resulta que
$2f(X) = 0 \Rightarrow f(X) = 0$

$= NA(NP - AP) - NM.NO =$
$NA(NP - PQ) - NM.NO =$
$NA.NQ - NM.NO$.

Seria bom provar que A, O, M, Q são cocíclicos, pois assim $NA.NQ = NM.NO$. Fica como exercício ao leitor provar essa proposição.

Como A, O, M, Q são concíclicos, então resulta que
$2f(X) = 0 \Rightarrow f(X) = 0$

Logo, $\text{Pot}(X, S_1) = \text{Pot}(X, S_2)$ ■